COLEGIUL NAŢIONAL
„VASILE LUCACIU"
BAIA MARE

Concursul "PRIN LABIRINTUL MATEMATICII"
ediţia a XIV-a, Baia Mare, 16 noiembrie 2019

CLASA a VIII-a

Subiectul 1.

Se consideră mulțimile $A = \{x | x = 7m - 15, m \in \mathbb{N}\}$,
$B = \{x | x = 300 - 42n, n \in \mathbb{N}\}$,
$C = \{x | x = 36p + 60, p \in \mathbb{N}\}$.

Determinați $A \cap B \cap C$.

Subiectul 2.

a) Arătați că pentru orice *x*, *y*, *k* numere reale strict pozitive are loc inegalitatea:

$$\sqrt{(x+k)(y+k)} \geq k + \sqrt{xy}\,.$$

b) Demonstrați că pentru orice *x*, *y* numere reale strict pozitive, avem:

$$\frac{x+y+1}{\sqrt{xy}+\sqrt{(x+1)(y+1)}} + \frac{x+y+2}{\sqrt{xy}+\sqrt{(x+2)(y+2)}} + \cdots + \frac{x+y+2019}{\sqrt{xy}+\sqrt{(x+2019)(y+2019)}} \geq 2019$$

Subiectul 3.

Fie piramida patrulateră regulată *VABCD*. Pe muchiile *VA*, *VB*, *VC* și *VD* se iau punctele *M*, *N*, *P* respectiv *Q* astfel încât $\frac{MA}{MV} = \frac{PC}{PV} = \frac{3}{5}, \frac{NB}{NV} = \frac{1}{5}$ și $\frac{VQ}{VD} = \frac{1}{2}$.

a) Arătați că dreapta *MP* este paralelă cu planul (*ABC*).

b) Demonstrați că punctele *M*, *N*, *P*,*Q* sunt coplanare.

Subiectul 4.

Se consideră punctele necoplanare *A*, *B*, *C* și *D* astfel încât (*AB*)≡(*AC*) și punctele *E*, *F* pe segmentele (*AB*), respectiv (*AC*), astfel încât (*AE*)≡(*CF*). Arătați că dreapta determinată de mijloacele segmentelor (*AD*) și (*EF*) este paralelă cu planul (*BCD*).

Notă:
1) Timp de lucru 3 h.
2) Fiecare subiect se notează cu puncte de la 0 la 7.

Baia Mare, str. Culturii, nr. 2, cod poştal 430282
Telefon şi fax: 0262211943, mobil secretariat: 0730123630
Cod fiscal 3825932, e-mail: lucaciu@lucaciu.multinet.ro

Concursul "PRIN LABIRINTUL MATEMATICII"
ediția a XIII-a, Baia Mare, 16 noiembrie 2019
BAREM DE CORECTARE CLASA a VIII-a

Subiectul 1.

Se consideră mulțimile $A = \{x | x = 7m - 15, m \in \mathbb{N}\}$,
$B = \{x | x = 300 - 42n, n \in \mathbb{N}\}$,
$C = \{x | x = 36p + 60, p \in \mathbb{N}\}$.

Determinați $A \cap B \cap C$.

Soluție.

Fie $x \in A \cap B \cap C \Longrightarrow x = 7m - 15, x = 300 - 42n, x = 36p + 60, m, n, p \in \mathbb{N}$
$7m - 15 = 36p + 60$ *și* $300 - 42n = 36p + 60 \Longrightarrow$........................**1p**
$m = 5p + 10 + \frac{p+5}{7}$ *și* $n = -p + 5 + \frac{p+5}{7}$........................**1p**
$m, n \in \mathbb{N} \Longrightarrow \frac{p+5}{7} = q \in \mathbb{N} \Longrightarrow p = 7q - 5 \Longrightarrow m = 36q - 15$ *și* $n = -6q + 10$ **2p**
$m, n, p \in \mathbb{N} \Longrightarrow q \geq \frac{5}{12}, q \geq \frac{5}{7}, q \leq \frac{5}{3} \Longrightarrow q \in \left[\frac{5}{7}, \frac{5}{3}\right] \cap \mathbb{N} \Longrightarrow q = 1$ .... **2p**.
Deci $m = 21, n = 4, p = 2 \Longrightarrow A \cap B \cap C = \{132\}$ **1p**

Subiectul 2.

a) Arătați că pentru orice *x*,*y*,*k* numere reale strict pozitive are loc inegalitatea:

$$\sqrt{(x+k)(y+k)} \geq k + \sqrt{xy}\,.$$

b) Demonstrați că pentru orice *x*,*y* numere reale strict pozitive, avem:

$$\frac{x+y+1}{\sqrt{xy}+\sqrt{(x+1)(y+1)}} + \frac{x+y+2}{\sqrt{xy}+\sqrt{(x+2)(y+2)}} + \cdots + \frac{x+y+2019}{\sqrt{xy}+\sqrt{(x+2019)(y+2019)}} \geq 2019$$

Soluție.

a) $\sqrt{(x+k)(y+k)} \geq k + \sqrt{xy} \Leftrightarrow xk + yk \geq 2k\sqrt{xy} \Leftrightarrow \left(\sqrt{x} - \sqrt{y}\right)^2 \geq 0$........................**2p**

b) $\sqrt{(x+k)(y+k)} \geq k + \sqrt{xy} \Leftrightarrow \sqrt{(x+k)(y+k)} - \sqrt{xy} \geq k \Leftrightarrow \frac{(x+k)(y+k)-xy}{\sqrt{(x+k)(y+k)}+\sqrt{xy}} \geq k$.......... **2p**

$$\Leftrightarrow \frac{k(x+y+k)}{\sqrt{(x+k)(y+k)}+\sqrt{xy}} \geq k \Leftrightarrow \frac{x+y+k}{\sqrt{(x+k)(y+k)}+\sqrt{xy}} \geq 1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots. \quad \textbf{2p}$$

Se adună inegalitățile de mai sus pentru $k \in \{1,2,3, \ldots\ldots, 2019\}$și se obține inegalitatea cerută. ...**1p**

Subiectul 3.

Fie piramida patrulateră regulată *VABCD*. Pe muchiile *VA*, *VB*, *VC* și *VD* se iau punctele *M*, *N*, *P* respectiv *Q* astfel încât $\frac{MA}{MV} = \frac{PC}{PV} = \frac{3}{5}, \frac{NB}{NV} = \frac{1}{5}$ și $\frac{VQ}{VD} = \frac{1}{2}$.

a) Arătați că dreapta *MP* este paralelă cu planul (*ABC*).

b) Demonstrați că punctele *M*, *N*, *P*,*Q* sunt coplanare.

Soluție.

a) În triunghiul *VAC* avem $\frac{AM}{VM}=\frac{PC}{VP}=\frac{3}{5}\Rightarrow MP\parallel AC, AC\subset(ABC)\Rightarrow MP\parallel(ABC)$ **2p**

b) Notăm $QM\cap AD=\{R\}$ şi $QP\cap CD=\{T\}$

Aplicând teorema lui Menelaus în triunghiul *VAD* și transversal *Q-M-R* obținem

$\frac{VQ}{QD}\cdot\frac{DR}{RA}\cdot\frac{AM}{VM}=1\Rightarrow\frac{RA}{DR}=\frac{3}{5}$ **1p**

$MP\parallel(ABC), MP\subset(QMP), (QMP)\cap(ABC)=RT\Rightarrow RT\parallel MP\parallel AC\Rightarrow\frac{CT}{DT}=\frac{3}{5}\Rightarrow\frac{CD}{DT}=\frac{2}{5}$..... **1p**

Fie $AB\cap RT=\{S\}\Rightarrow\frac{AS}{DT}=\frac{AR}{RD}=\frac{3}{5}\Rightarrow\frac{AS}{AB}\cdot\frac{DC}{DT}=\frac{3}{5}\Rightarrow\frac{AS}{AB}\cdot\frac{2}{5}=\frac{3}{5}\Rightarrow\frac{AS}{AB}=\frac{3}{2}$ **1p**

În triunghiul *VAB* avem $\frac{VM}{MA}\cdot\frac{AS}{BS}\cdot\frac{BN}{VN}=\frac{5}{3}\cdot 3\cdot\frac{1}{5}=1\Rightarrow M,N,S$ sunt coliniare **1p**

$MS\subset(QMP)\Rightarrow N\in(QMP)\Rightarrow$ *M*, *N*, *P*,*Q* sunt coplanare. **1p**

Subiectul 4.

Se consideră punctele necoplanare *A*, *B*, *C* şi *D* astfel încât (*AB*)≡(*AC*) și punctele *E* și *F* pe segmentele (*AB*), respectiv (*AC*) astfel încât (*AE*)≡(*CF*). Arătați că dreapta determinată de mijloacele segmentelor (*AD*) şi (*EF*) este paralelă cu planul (*BCD*).

Soluție:

Fie *M* mijlocul segmentului [*EF*] şi *N* mijlocul segmentului [*AD*].

Triunghiul *ABC* este isoscel$\Rightarrow\measuredangle ABC\equiv\measuredangle ACB$ și $BE=AF$ **1p**

Fie $PE\parallel AC, P\in BC\Rightarrow\measuredangle EPB\equiv\measuredangle ACB\Rightarrow\measuredangle EPB\equiv\measuredangle ABC\Rightarrow EPB$ isoscel $\Rightarrow EP=EB$ **2p**

$EP=AF, PE\parallel AF\Rightarrow$*AFBE* paralelogram şi deci *A*, *M*, *P* coliniare şi *M* mijlocul lui *AP*........................ **2p**

În triunghiul *APD*, [*MN*] linie mijlocie$\Rightarrow MN\parallel PD, PD\subset(BCD)\Rightarrow MN\parallel(BCD)$ **2p**